Cálculo Numérico	**Lista número 8**
Revisão	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
alun@:	
24 de junho de 2013	**Univ. Estadual Vale do Acaraú**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	www.Cálculo Numérico.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Revisão*
objetivo: *Objetivo aqui NAF*
palavras chave: Teorema da Função Implícita, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Green.

1. **Teorema de Green**

   (a) **(V)[ ](F)[ ] O campo vetorial**

   $$V(x,y) = (3x+4y, 3y+4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{1}$$

   é conservativo (é a jacobiana de um campo escalar).

   (b) **(V)[ ](F)[ ] Considere o campo vetorial**

   $$V(x,y) = (3x+4y, 3y+4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{2}$$

   e seja γ uma curva fechada do plano. Então

   $$\oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

   (c) **(V)[ ](F)[ ] Considere o campo vetorial**

   $$V(x,y) = (3x+4y, 3y+4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{3}$$

   e sejam α e β duas curvas ligando os pontos

   $$A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$$

   do plano. As duas curvas, α, β, se originam no ponto A e terminam no ponto B. Então

   $$\oint_{\alpha} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_{\beta} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

   quaisquer que sejam os pontos $A, B \in \mathbf{R}^2$.

   (d) **(V)[ ](F)[ ] Considere o campo vetorial**

   $$V(x,y) = (3x+4y, 3y+4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{4}$$

   e sejam α e β duas curvas ligando os pontos

   $$A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1)$$

   do plano. Chame de $-\beta$ a curva que se origina no ponto B e termina no ponto A, que coincide com β, mas no sentido contrário desta. Defina a curva γ como a união de α e $-\beta$ então

   $$\oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

   quaisquer que sejam os pontos $A, B \in \mathbf{R}^2$.

(e) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **Considere o campo vetorial**

$$V(x,y) = (3x + 4y, 3y + 4x) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{5}$$

e <u>**selecione**</u> **um ponto arbitrário** $A = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. **Nestas condições**

$$F(x,y) = \oint_{\gamma} P(s,t)ds + Q(s,t)dt$$

está bem definida para qualquer curva γ **que se origine em** $A = (x_0, y_0)$ **e finalise em** (x,y), **em outras palavras, qualquer curva** γ **que ligue os pontos** $A = (x_0, y_0)$ **e** (x,y). **E nestas condições**

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q;$$

2. <u>**Teorema de Green**</u>

(a) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **Considere o campo vetorial**

$$V(x,y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{6}$$

é conservativo (é a jacobiana de um campo escalar).

(b) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **Considere o campo vetorial**

$$V(x,y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{7}$$

A integral

$$\oint_{\mathbf{S}^1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

em que $\mathbf{S}^1$ **é o círculo trigonométrico.**

(c) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **Considere o campo vetorial**

$$V(x,y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{8}$$

A integral

$$\int_U \int P_y(x,y) - Q_x(x,y)dxdy = 0$$

em que U **é o disco unitário com centro na origem.**

(d) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **Considere o campo vetorial**

$$V(x,y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{9}$$

A integral

$$\int_U \int P_y(x,y) - Q_x(x,y)dxdy = \frac{4\pi}{3}$$

em que U **é o disco unitário com centro na origem.**

(e) **(V)[ ](F)[ ] Considere o campo vetorial**

$$V(x,y) = (3x + 2y, x - 10 + 4y) = (P(x,y), Q(x,y)) \tag{10}$$

A integral

$$\int\int_U P_y(x,y) - Q_x(x,y)dxdy = \frac{3\pi}{4}$$

em que U é o disco unitário com centro na origem.

3. Integral Múltipla

(a) **(V)[ ](F)[ ] Se D for uma região do espaço $\mathbf{R}^3$ então**

$$\int\int\int_D dxdydz$$

é área da superfície que limita D.

(b) **(V)[ ](F)[ ] Se D for uma região do espaço $\mathbf{R}^3$ então**

$$\int\int\int_D dxdydz$$

é volume de D ou ainda, a medida de D, se esta integral existir.

(c) **(V)[ ](F)[ ] Se D for uma região limitada do $\mathbf{R}^2$ e**

$$z = F(x,y) = 2$$

então

$$\int\int_D F(x,y)dxdy$$

é o volume de um sólido de altura 2 tendo por base D e o volume vale duas vezes a área de D, se esta integral existir (puder ser calculada).

(d) **(V)[ ](F)[ ] Se D for uma região limitada do $\mathbf{R}^2$ e $z = F(x,y)$ for uma função contínua definida em uma região que contenha D então então, se**

$$\int\int_D F(x,y)dxdy$$

existir, é o *volume algébrico* de um sólido limitado pelo gráfico de F e plano XOY restrito à região D, (a região D é a *base* deste sólido).

(e) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> U **é um disco de raio 1 centrado na origem entao**

$$\int\int_U xy\ dxdy = \pi$$

4. <u>Integral e Derivada</u>

(a) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **No quadrado**

$$\mathcal{D} = [0,a] \quad \text{x} \quad [0,a]\ ; a > 0;$$

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^{a\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} \tag{11}$$

(b) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **No quadrado** $\mathcal{D} = [0,a] \quad \text{x} \quad [0,a]\ ; a > 0$**,**

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} \tag{12}$$

(c) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> $F(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ **Definindo**

$$\begin{cases} u(x,y) = x+y; \\ v(x,y) = 1+x^2+y^2; \\ F(x,y) = \frac{u(x,y)}{v(x,y)} \end{cases}$$

então

$$F_x(x,y) = \left[u_x(x,y)v(x,y) - u(x,y)v_x(x,y)\right]/v(x,y)$$

(d) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> $F(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ **Definindo**

$$\begin{cases} u(x,y) = x+y; \\ v(x,y) = 1+x^2+y^2; \\ F(x,y) = \frac{u(x,y)}{v(x,y)} \end{cases}$$

então

$$F_y(x,y) = \frac{\left[y - 2xy + x^2y - y^3\right]}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

(e) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **O domínio de** F **é o plano todo. Considere um ponto do plano, um ponto dado,** $P = (a,b)$**.**

$$\begin{cases} A = F_x(a,b); B = F_y(a,b); \\ P(x,y) = F(a,b) - A(x-a) - B(y-b) \end{cases}$$

P **é a equação do plano tangente ao gráfico de** F **no ponto** $(a,b,F(a,b))$**.**

5. Teor. Fund do Cálculo

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$u(x) = sin(x); du = cos(x)dx; \tag{12}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = 1 \tag{13}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx \tag{14}$$
$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(2x)d2x = \int_{0}^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{15}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx \tag{16}$$
$$I = \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} \sin(2x)d2x = \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2} \sin(t)dt = \tag{17}$$
$$I = -\frac{1}{2}cos(t)|_{0}^{\pi/2} = 1 \tag{18}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$I = \int_{0}^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int_{0}^{2\pi} \cos(2x)dx \tag{19}$$
$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \cos(2x)d2x = \frac{1}{2}\int_{0}^{4\pi} \cos(t)dt = 0 \tag{20}$$
$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int_{0}^{2\pi} \sin^2(x)dx \tag{21}$$
$$\int_{0}^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_{0}^{2\pi} dx = 2\pi \tag{22}$$
$$\int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)dx = \pi = \int_{0}^{2\pi} \cos^2(x)dx \tag{23}$$

(e) <u>**(V)**[ ]**(F)**[ ]</u>

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \sin^2(x))dx = \int\limits_0^{2\pi} sin(2x)dx \tag{24}$$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin(2x)d2x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin(t)dt = 0 \tag{25}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)dx \tag{26}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int\limits_0^{2\pi} dx = 2\pi \tag{27}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi \tag{28}$$