Cálculo Numérico | **Lista numero 04**
Curvas com gnuplot | tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

17 de abril de 2013 | **Univ. Estadual Vale do Acaraú**
Documento escrito com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux
www.calculo-numerico.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Curvas com gnuplot* *objetivo: Entender como gnuplot produz curvas e aprender a colocar uma curva sobre uma superfície no espaço (e ver o gráfico).*

palavras chave: *Curvas, curvas no espaço, derivada implícita, gnuplot e curvas, gradiente, integral de curvas, regra da cadéia*

1. *Curvas com gnuplot Sendo $z = F(x,y) = x^2 - y^2$ uma função diferenciável e $\alpha(t) = (cos(t), sin(t))$ então*
   (a) *(V)[ ](F)[ ] $F(\alpha(t))$ é um círculo no espaço 3D quandd $t \in [-\pi, \pi]$*
   (b) *(V)[ ](F)[ ] $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ é uma curva no espaço cuja projeção sobre o plano XOY é o círculo trigonométrico.*
   (c) *(V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ fazendo t variar de acordo com um passo δ e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do* `gnuplot`
   ```
   plot "dados" with points
   ```
   irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão.
   (d) *(V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ fazendo t variar de acordo com um passo δ e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do* `gnuplot` *irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão:*
   ```
   splot "dados" with points
   ```
   (e) *(V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos $(\alpha(t), F(\alpha(t))$ fazendo t variar de acordo com um passo δ e registrar*

esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do `gnuplot` *irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão desenhada em cima da variedade bidimensional $graf(F(x,y))$.*
   splot F(x,y), "dados"with points

2. *regra da cadeia*
   Considere $z = F(x,y)$ e $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada no intervalo I
   (a) *(V)[ ](F)[ ] $\gamma(t) = F(\alpha(t))$ é uma curva plana como sugere a sucessão de comandos do* `gnuplot`
   ```
   pow(x,n) = x**n;
   F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
   x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
   gama(t) = F(x(t),y(t));
   print "(", 3, ",", gama(3),")", " , ",  "(", 4, ",", gama(4),")", "...   etc...."
   ```
   (b) *(V)[ ](F)[ ] Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então*
   $$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$
   é uma curva no espaço 3D e os comandos seguintes do `gnuplot` *mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva γ.*
   ```
   pow(x,n) = x**n;
   F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
   x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
   gama(t) = F(x(t),y(t));
   a = -3;
   set arrow from 0,0 to x(a), y(a);
   b = -3;
   set arrow from 0,0 to x(b), y(b);
   splot F(x,y);
   ```
   (c) *(V)[ ](F)[ ] Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então*
   $$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$
   é uma curva no espaço 3D e os comandos seguintes do `gnuplot` *mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva γ.*
   ```
   pow(x,n) = x**n;
   F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
   D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
   x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
   z(t) = F(x(t),y(t));
   dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
   gama(t) = (x(t), y(t), F(x(t),y(t));
   ```

```
t1 = -3; a1 = x(t1); b1 = y(t1);  z1 = F(a1, b1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(x(t1),y(t1))*dx(t1) + D_yF(x(t1),y(t1))*dy(t1);
set arrow from  a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y), gama(t);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

(d) *(V)[ ](F)[ ] Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma curva no espaço 3D.*

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado "dados", contendo os pontos $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ com uma certa frequência definida por um passo δ. Os comandos seguintes do `gnuplot` *mostram um vetor tangente ao gráfico da curva γ.*

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1);  z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
set arrow from  a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

(e) *(V)[ ](F)[ ] Se α for uma curva plana e $g(t) = F(\alpha(t))$ então $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma curva no espaço 3D.*

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado "dados", contendo os pontos $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ com uma certa frequência definida por um passo δ. Os comandos seguintes do `gnuplot` *mostram um vetor tangente ao gráfico da curva γ.*

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = - 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1);  z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
```



```
set arrow from  a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";
```

3. *Curva no espaço*

   Se $z = F(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$ e $t \mapsto \alpha(t)$ for uma curva plana então

   (a) *(V)[ ](F)[ ] $g(t) = F(\alpha(t))$ é uma função univariada.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$ é uma variedade de dimensão 1 imersa na variedade tridimensional $\mathbf{R}^3$ cuja projeção no plano XOY é a curva*
   $$t \mapsto \alpha(t);$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] A derivada da curva γ é a curva $t \mapsto (\alpha'(t), g'(t))$.*

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Dado um valor para $t = a$ então o vetor $(\alpha'(a), g'(a))$ é paralelo a um vetor tangente ao gráfico de γ.*

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Dado um valor para $t = a$ então o vetor*
   $$(\alpha(a), g(a)) + (\alpha'(a), g'(a))$$
   é tangente ao gráfico de γ no ponto $(\alpha(a), g(a))$.

4. *Integral de curvas*

   Sendo $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

   (a) *(V)[ ](F)[ ] $g(t) = F(x(t), y(t))$ é uma função univariada que é diferenciável.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Nas condições do item anterior,*
   $$g'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t);$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] g' definida no item anterior é uma função univariada.*

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Pelo Teorema Fundamental do Cálculo*
   $$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a);$$

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que $\alpha(t) = (cos(t), sin(t))$, então $\int_0^{2\pi} g'(t)dt = 0$*

5. *integral de curvas*

   Sendo $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ em que x, y são duas funções diferenciáveis, então

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Então* $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), F(x(t), y(t))$ *é uma função univariada do* tipo *"função vetorial de variável real", quer dizer, transforma* um número *n*um vetor *do* $\mathbf{R}^3$. $graf(\gamma)$ *é uma variedade de dimensão 1.*

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Podemos calcular a integral* $\int_a^b \gamma(t)dt$ *em que* γ *está definida no item 5a sendo o resultado o vetor*

$$\left(\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b F(x(t), y(t))dt \right)$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt$ *é um número real, em que* γ *está definida no 5a.*

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt = \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} F(x(t), y(t))dt \right) = (0, 0, 2\pi)$$

é um vetor do $\mathbf{R}^3$.

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada* $\gamma'(t)$ *existe e vale*

$$(\alpha'(t), F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t));$$

γ *está definida no item 5a.*

6. *<u>integral de curvas</u>*

Sendo $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ *e* $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ *em que* x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t)))$ *é um curva plana.*

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \cdot \alpha'(t)$ *é uma função univariada. O produto indicado com o símbolo "·" é o produto escalar.*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \times \alpha'(t)$ *é uma curva no espaço* $\mathbf{R}^3$. *O produto indicado com o símbolo "×" é o produto vetorial.*

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ *for uma curva diferenciável então* $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$ *é uma função univariada.O produto indicado com o símbolo "·" é o produto escalar.*

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A integral* $\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt$ *é um número e se*

$$\gamma(t) = (cos(t), sin(t))$$

então

$$\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt = 0;$$

O produto indicado com o símbolo "·" é o produto escalar.

7. *<u>Curva de nível</u>*

Sendo $z = F(x, y)$ *uma função diferenciável e* $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ *em que* x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $F(x, y) = c$, *em que* c *é uma constante dada, pelo Teorema da Função Implícita, é uma variedade de dimensão 1 e pode ter uma curva por solução, chamada de "curva de nível* c *de* F".

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A curva definida no item 7a é uma curva contida no plano* XOY, *no domínio de* F.

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Calculando a derivada implícita de* $F(x, y) = c$ *podemos concluir que o gradiente de* F *é perpendicular a qualquer curva de nível.*

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Suponha que* $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$ *seja uma curva diferenciável do plano* XOY *então* $[a, b] \ni t \mapsto (\gamma(t), F(\gamma(t)))$ *é uma curva diferenciável do espaço* $\mathbf{R}^3$ *colocada sobre o gráfico de* F.

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *É possível calcular a integral* $\int_a^b (\gamma(t), F(\gamma(t)))dt$ *e o resultado é um número real.*

8. *<u>Curvas com gnuplot</u> O símbolo* ∇ *representa o gradiente. Sendo*

$$z = F(x, y)$$

uma função diferenciável e

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

em que x, y *são duas funções diferenciáveis, então*

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt}$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\frac{d}{dt}F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt}$ *não tem sentido porque não está definida a multiplicação entre dois vetores.*

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A derivada implícita de* $G(t) = F(\alpha(t))$ *mostra que podemos dar um sentido ao produto de vetores que aparece no item 8b como um produto escalar* $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$

(d) (V)[ ](F)[ ] A derivação implicita usada no item 8c mostra que

$$\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(a), y(a)) - F(x(b), y(b))$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A derivação implicita usada no item 8c mostra que

$$F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

9. Curvas com gnuplot

Sendo $w = F(x, y, z)$ uma função diferenciável e

$$t \mapsto (\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

em que x, y, z são três funções diferenciáveis, então

(a) (V)[ ](F)[ ] A derivada implicita de $F(x, y, z) = d$ em que d é uma constante, mostra que ∇F é perpendicular às superfícies de nível $F(x, y, z) = d$ quando estas existirem.

(b) (V)[ ](F)[ ] A função $[a, b] \ni t \mapsto (\alpha(t), F(\alpha(t)))$ é uma curva diferenciável no espaço $4D$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\frac{d}{dt}(\alpha(t), F(\alpha(t)) = (\alpha'(t), \nabla F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t))$

(d) Vetor normal a uma superfície(V)[ ](F)[ ] Parte do cálculo no item 9c sugere o cálculo de um coeficiente de variação que fica representado pela expressão perfeitamente calculável $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t)$. Esta expressão será otimizada quando $\gamma(t)$ tiver a mesma direção do gradiente.

(e) (V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível definir

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$$

correspondendo a cada valor de t um vetor unitário na direção de ∇F. Então a integral

$$\int_a^n \nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t) dt$$

está bem definida e é um número real.

10. Integral sobre uma curva

Quando uma integral estiver sendo calculado sobre uma curva (uma variedade de dimensão) ele é chamada integral de linha. Todas as integrais nesta lista são deste tipo, mas apenas agora nesta questão é você ver a notação e tomar conhecimento das variedades de integrais de linha que existem.

Considere $F(x, y) = 3x^2y^3 - 2x^3y^2$ definida no domínio W do plano delimitado pelas cuvas planas

(a) $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, t^2 - 4); t \in [-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}]$

(b) $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t, 9 - t^2); t \in [-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}]$

Vou designar o número $\sqrt{\frac{13}{2}}$ com o símbolo r.

Já vimos nas questões anteriores que restringir o domínio de uma função $z = F(x, y)$ ao contorno de uma curva, "transforma" F numa função univariada cuja integral é uma integral simples, e nesta questão vamos ver propriedades desta "integral de linha".

(a) (V)[ ](F)[ ] A integral de F sobre a curva $(x_1(t), y_1(t))$ dada pela expressão

$$\int_{-r}^{r} F((x_1(t), y_1(t))dt = \int_{-r}^{r} \left(3t^2(t^2 - 4)^3 - 2t^3(9 - t^2)^2\right) dt$$

(b) (V)[ ](F)[ ] A integral de F sobre a curva $(x_1(t), y_1(t))$ dada pela expressão

$$\int_{-r}^{r} F((x_1(t), y_1(t)) \cdot (x_1'(t), y_1'(t))dt = \tag{1}$$

$$= \int_{-r}^{r} 3t^2 \left((t^2 - 4)^3 - 3t^2(9 - t^2)^2\right) \cdot (1, 2t)dt \tag{2}$$

Nota: O produto na equação (eq. 1) é o produto de um escalar, $F((x_1(t), y_1(t))$, por um vetor, $(x_1'(t), y_1'(t))$ e vale aproximadamente

$$(114.254617463, 4815.86510396)$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] A integral de F sobre a curva* $(x_2(t), y_2(t))$ *dada pela expressão*

$$\int_{r}^{-r} (F_x((x_1(t), y_1(t)), F_y((x_1(t), y_1(t)))) \cdot (x_2'(t), y_2'(t))dt = \quad (3)$$

$$\int_{r}^{-r} (\nabla F(x_1(t), y_1(t))) \cdot (1, 2t)dt \quad (4)$$

Nota: *O produto na equação (eq. 3) é o produto escalar dos vetores* $\nabla F((x_1(t), y_1(t))$ *e* $(1, 2t)$ *e a integral vale aproximadamente* -235.259249986