



Cálculo Numérico  
Curvas com gnuplot  
T. Praciano-Pereira

**alun@:**

Lista numero 04  
tarcisio.praciano@gmail.com  
Dep. de Computação

17 de abril de 2013

Univ. Estadual Vale do Acaraú

Documento escrito com L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

sis. op. Debian/Gnu/Linux

www.calculo-numerico.sobralmatematica.org

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na sua solução desta lista, deixando-a em branco. Ela será usada na correção.

**Exercícios 1** *Curvas com gnuplot* objetivo: Entender como gnuplot produz curvas e aprender a colocar uma curva sobre uma superfície no espaço (e ver o gráfico).

palavras chave: Curvas, curvas no espaço, derivada implícita, gnuplot e curvas, gradiente, integral de curvas, regra da cadeia

1. Curvas com gnuplot Sendo  $z = F(x, y) = x^2 - y^2$  uma função diferenciável e  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$  então

(a) (V)[ ](F)[ ]  $F(\alpha(t))$  é um círculo no espaço 3D quando  $t \in [-\pi, \pi]$

(b) (V)[ ](F)[ ]  $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$  é uma curva no espaço cuja projeção sobre o plano  $XOY$  é o círculo trigonométrico.

(c) (V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos  $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$  fazendo  $t$  variar de acordo com um passo  $\delta$  e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do gnuplot

```
plot "dados" with points
```

irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão.

(d) (V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos  $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$  fazendo  $t$  variar de acordo com um passo  $\delta$  e registrar esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do gnuplot irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão:

```
splot "dados" with points
```

(e) (V)[ ](F)[ ] Com auxílio de um programa posso construir os pontos  $(\alpha(t), F(\alpha(t)))$  fazendo  $t$  variar de acordo com um passo  $\delta$  e registrar

esta matriz no arquivo "dados". O comando seguinte do `gnuplot` irá reproduzir a curva espacial definida no item 1b desta questão desenhada em cima da variedade bidimensional  $\text{graf}(F(x,y))$ .

`splot F(x,y), "dados"with points`

## 2. regra da cadeia

Considere  $z = F(x,y)$  e  $\alpha(t) = (x(t),y(t))$  uma curva parametrizada no intervalo  $I$

(a) (V)(F)  $\gamma(t) = F(\alpha(t))$  é uma curva plana como sugere a sucessão de comandos do `gnuplot`

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
gama(t) = F(x(t),y(t));
print "(3, ", gama(3),")", " , ", "(4, ", gama(4),")", "... etc...."
```

(b) (V)(F) Se  $\alpha$  for uma curva plana e  $g(t) = F(\alpha(t))$  então

$$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$

é uma curva no espaço 3D e os comandos seguintes do `gnuplot` mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva  $\gamma$ .

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
gama(t) = F(x(t),y(t));
a = -3;
set arrow from 0,0 to x(a), y(a);
b = -3;
set arrow from 0,0 to x(b), y(b);
splot F(x,y);
```

(c) (V)(F) Se  $\alpha$  for uma curva plana e  $g(t) = F(\alpha(t))$  então

$$\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$$

é uma curva no espaço 3D e os comandos seguintes do `gnuplot` mostram alguns vetores tangentes ao gráfico da curva  $\gamma$ .

```
pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
gama(t) = (x(t), y(t), F(x(t),y(t)));
```

```

t1 = -3; a1 = x(t1); b1 = y(t1); z1 = F(a1, b1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(x(t1),y(t1))*dx(t1) + D_yF(x(t1),y(t1))*dy(t1);
set arrow from a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y), gama(t);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";

```

- (d)  $(V) \int (F) \int$  Se  $\alpha$  for uma curva plana e  $g(t) = F(\alpha(t))$  então  $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$  é uma curva no espaço 3D.

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado “dados”, contendo os pontos  $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$  com uma certa frequência definida por um passo  $\delta$ . Os comandos seguintes do `gnuplot` mostram um vetor tangente ao gráfico da curva  $\gamma$ .

```

pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1); z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;
set arrow from a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";

```

- (e)  $(V) \int (F) \int$  Se  $\alpha$  for uma curva plana e  $g(t) = F(\alpha(t))$  então  $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$  é uma curva no espaço 3D.

Suponha que com um programa você gerou um arquivo chamado “dados”, contendo os pontos  $\gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$  com uma certa frequência definida por um passo  $\delta$ . Os comandos seguintes do `gnuplot` mostram um vetor tangente ao gráfico da curva  $\gamma$ .

```

pow(x,n) = x**n;
F(x,y) = pow(x,2) - pow(y,2);
D_xF(x,y) = 2*x; D_yF(x,y) = - 2*y;
x(t) = cos(t); y(t) = sin(t);
z(t) = F(x(t),y(t));
dx(t) = -sin(t); dy(t) = cos(t);
g(t) = F(x(t),y(t));
t1 = -3;
a1 = x(t1); b1 = y(t1); z1 = g(t1);
p1 = dx(t1); q1 = dy(t1);
r1 = D_xF(a1,b1)*p1 + D_yF(a1,b1)*q1;

```

```

set arrow from a1, b1, z1 to (a1 +p1) , (b1+q1), (z1+r1) head
splot F(x,y);
pause -2 "Aperte enter para terminar ";

```

### 3. Curva no espaço

Se  $z = F(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$  e  $t \mapsto \alpha(t)$  for uma curva plana então

- (a)  $(V)[ ](F)[ ] g(t) = F(\alpha(t))$  é uma função univariada.  
 (b)  $(V)[ ](F)[ ] t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), g(t))$  é uma variedade de dimensão 1 imersa na variedade tridimensional  $\mathbf{R}^3$  cuja projeção no plano XOY é a curva

$$t \mapsto \alpha(t);$$

- (c)  $(V)[ ](F)[ ]$  A derivada da curva  $\gamma$  é a curva  $t \mapsto (\alpha'(t), g'(t))$ .  
 (d)  $(V)[ ](F)[ ]$  Dado um valor para  $t = a$  então o vetor  $(\alpha'(a), g'(a))$  é paralelo a um vetor tangente ao gráfico de  $\gamma$ .  
 (e)  $(V)[ ](F)[ ]$  Dado um valor para  $t = a$  então o vetor

$$(\alpha(a), g(a)) + (\alpha'(a), g'(a))$$

é tangente ao gráfico de  $\gamma$  no ponto  $(\alpha(a), g(a))$ .

### 4. Integral de curvas

Se  $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  e  $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$  em que  $x, y$  são duas funções diferenciáveis, então

- (a)  $(V)[ ](F)[ ] g(t) = F(x(t), y(t))$  é uma função univariada que é diferenciável.  
 (b)  $(V)[ ](F)[ ]$  Nas condições do item anterior,

$$g'(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t);$$

- (c)  $(V)[ ](F)[ ]$   $g'$  definida no item anterior é uma função univariada.  
 (d)  $(V)[ ](F)[ ]$  Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a);$$

- (e)  $(V)[ ](F)[ ]$  Suponha que  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ , então  $\int_0^{2\pi} g'(t)dt = 0$

### 5. integral de curvas

Se  $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  e  $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$  em que  $x, y$  são duas funções diferenciáveis, então

(a) (V)[ ](F)[ ] Então  $t \mapsto \gamma(t) = (\alpha(t), F(x(t), y(t)))$  é uma função univariada do tipo “função vetorial de variável real”, quer dizer, transforma um número num vetor do  $\mathbf{R}^3$ .  $\text{graf}(\gamma)$  é uma variedade de dimensão 1.

(b) (V)[ ](F)[ ] Podemos calcular a integral  $\int_a^b \gamma(t)dt$  em que  $\gamma$  está definida no item 5a sendo o resultado o vetor

$$\left( \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b F(x(t), y(t))dt \right)$$

(c) (V)[ ](F)[ ]  $\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt$  é um número real, em que  $\gamma$  está definida no 5a.

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t)dt = \left( \int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt, \int_{-\pi}^{\pi} F(x(t), y(t))dt \right) = (0, 0, 2\pi)$$

é um vetor do  $\mathbf{R}^3$ .

(e) (V)[ ](F)[ ] A derivada  $\gamma'(t)$  existe e vale

$$(\alpha'(t), F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t));$$

$\gamma$  está definida no item 5a.

## 6. integral de curvas

Seja  $z = F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  e  $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$  em que  $x, y$  são duas funções diferenciáveis, então

(a) (V)[ ](F)[ ]  $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t)))$  é uma curva plana.

(b) (V)[ ](F)[ ]  $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \cdot \alpha'(t)$  é uma função univariada. O produto indicado com o símbolo “ $\cdot$ ” é o produto escalar.

(c) (V)[ ](F)[ ]  $[a, b] \ni t \mapsto (F_x(\alpha(t)), F_y(\alpha(t))) \times \alpha'(t)$  é uma curva no espaço  $\mathbf{R}^3$ . O produto indicado com o símbolo “ $\times$ ” é o produto vetorial.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se  $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$  for uma curva diferenciável então  $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$  é uma função univariada. O produto indicado com o símbolo “ $\cdot$ ” é o produto escalar.

(e) (V)[ ](F)[ ] A integral  $\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t)dt$  é um número e se

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

então

$$\int_a^b \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt = 0;$$

O produto indicado com o símbolo “.” é o produto escalar.

### 7. Curva de nível

Seja  $z = F(x, y)$  uma função diferenciável e  $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$  em que  $x, y$  são duas funções diferenciáveis, então

- (a) (V)[ ](F)[ ]  $F(x, y) = c$ , em que  $c$  é uma constante dada, pelo Teorema da Função Implícita, é uma variedade de dimensão 1 e pode ter uma curva por solução, chamada de “curva de nível  $c$  de  $F$ ”.
- (b) (V)[ ](F)[ ] A curva definida no item 7a é uma curva contida no plano  $XOY$ , no domínio de  $F$ .
- (c) (V)[ ](F)[ ] Calculando a derivada implícita de  $F(x, y) = c$  podemos concluir que o gradiente de  $F$  é perpendicular a qualquer curva de nível.
- (d) (V)[ ](F)[ ] Suponha que  $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$  seja uma curva diferenciável do plano  $XOY$  então  $[a, b] \ni t \mapsto (\gamma(t), F(\gamma(t)))$  é uma curva diferenciável do espaço  $\mathbf{R}^3$  colocada sobre o gráfico de  $F$ .
- (e) (V)[ ](F)[ ] É possível calcular a integral  $\int_a^b (\gamma(t), F(\gamma(t))) dt$  e o resultado é um número real.

### 8. Curvas com gnuplot O símbolo $\nabla$ representa o gradiente. Sendo

$$z = F(x, y)$$

uma função diferenciável e

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

em que  $x, y$  são duas funções diferenciáveis, então

- (a) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt}$
- (b) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) = \nabla F(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt}$  não tem sentido porque não está definida a multiplicação entre dois vetores.
- (c) (V)[ ](F)[ ] A derivada implícita de  $G(t) = F(\alpha(t))$  mostra que podemos dar um sentido ao produto de vetores que aparece no item 8b como um produto escalar  $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$

(d) (V)[ ](F)[ ] A derivação implícita usada no item 8c mostra que

$$\nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(a), y(a)) - F(x(b), y(b))$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A derivação implícita usada no item 8c mostra que

$$F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

é um diferencial total (uma derivada) e neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_a^b \nabla F(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

## 9. Curvas com gnuplot

Seja  $w = F(x, y, z)$  uma função diferenciável e

$$t \mapsto (\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)))$$

em que  $x, y, z$  são três funções diferenciáveis, então

(a) (V)[ ](F)[ ] A derivada implícita de  $F(x, y, z) = d$  em que  $d$  é uma constante, mostra que  $\nabla F$  é perpendicular às superfícies de nível  $F(x, y, z) = d$  quando estas existirem.

(b) (V)[ ](F)[ ] A função  $[a, b] \ni t \mapsto (\alpha(t), F(\alpha(t)))$  é uma curva diferenciável no espaço  $4D$

(c) (V)[ ](F)[ ]  $\frac{d}{dt} (\alpha(t), F(\alpha(t))) = (\alpha'(t), \nabla F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t))$

(d) Vetor normal a uma superfície(V)[ ](F)[ ] Parte do cálculo no item 9c sugere o cálculo de um coeficiente de variação que fica representado pela expressão perfeitamente calculável  $\nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t)$ . Esta expressão será otimizada quando  $\gamma(t)$  tiver a mesma direção do gradiente.

(e) (V)[ ](F)[ ] Suponha que seja possível definir

$$[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t)$$

correspondendo a cada valor de  $t$  um vetor unitário na direção de  $\nabla F$ . Então a integral

$$\int_a^n \nabla F(\alpha(t)) \cdot \gamma(t) dt$$

está bem definida e é um número real.

#### 10. Integral sobre uma curva

Quando uma integral estiver sendo calculado sobre uma curva (uma variedade de dimensão) ele é chamada integral de linha. Todas as integrais nesta lista são deste tipo, mas apenas agora nesta questão é você ver a notação e tomar conhecimento das variedades de integrais de linha que existem.

Considere  $F(x, y) = 3x^2y^3 - 2x^3y^2$  definida no domínio  $W$  do plano delimitado pelas curvas planas

$$(a) \gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, t^2 - 4); t \in [-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}]$$

$$(b) \gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t, 9 - t^2); t \in [-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}]$$

Vou designar o número  $\sqrt{\frac{13}{2}}$  com o símbolo  $r$ .

Já vimos nas questões anteriores que restringir o domínio de uma função  $z = F(x, y)$  ao contorno de uma curva, “transforma”  $F$  numa função univariada cuja integral é uma integral simples, e nesta questão vamos ver propriedades desta “integral de linha”.

(a) (V)[ ](F)[ ] A integral de  $F$  sobre a curva  $(x_1(t), y_1(t))$  dada pela expressão

$$\int_{-r}^r F((x_1(t), y_1(t))) dt = \int_{-r}^r (3t^2(t^2 - 4)^3 - 2t^3(9 - t^2)^2) dt$$

(b) (V)[ ](F)[ ] A integral de  $F$  sobre a curva  $(x_1(t), y_1(t))$  dada pela expressão

$$\int_{-r}^r F((x_1(t), y_1(t))) \cdot (x'_1(t), y'_1(t)) dt = \quad (1)$$

$$= \int_{-r}^r 3t^2 ((t^2 - 4)^3 - 3t^2(9 - t^2)^2) \cdot (1, 2t) dt \quad (2)$$

**Nota:** O produto na equação (eq. 1) é o produto de um escalar,  $F((x_1(t), y_1(t)))$ , por um vetor,  $(x'_1(t), y'_1(t))$  e vale aproximadamente

$$(114.254617463, 4815.86510396)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] A integral de  $F$  sobre a curva  $(x_2(t), y_2(t))$  dada pela expressão

$$\int_r^{-r} (F_x(x_1(t), y_1(t)), F_y(x_1(t), y_1(t))) \cdot (x_2'(t), y_2'(t)) dt = \quad (3)$$

$$\int_r^{-r} (\nabla F(x_1(t), y_1(t))) \cdot (1, 2t) dt \quad (4)$$

**Nota:** O produto na equação (eq. 3) é o produto escalar dos vetores  $\nabla F(x_1(t), y_1(t))$  e  $(1, 2t)$  e a integral vale aproximadamente  $-235.259249986$